Daniel Perrin Cours d'Algèbre p.143

Isenman

106 **Développement : Générateurs de $O(q)$ et $O^+(q)$**

108

160 Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit q une forme quadratique sur E déf pos

161 et f sa forme bilinéaire symétrique associée.

170 __Déf :__ Le groupe orthogonal est :

171 $$O(q) = \{u \in GL(E),\ \forall x,y \in E,\ f(u(x),u(y)) = f(x,y)\}.$$

190 C'est l'ens des isométries de E. On définit également

159? $$O^+(q) = \{u \in O(q),\ \det(u) = 1\}.$$

__Prop :__ Soit $u \in GL(E)$ tq $u^2 = id_E$. Alors il existe $E^+(u), E^-(u)$ tq :

i) $E = E^+(u) \oplus E^-(u)$

ii) $u_{|E^+(u)} = id_{E^+(u)}$ et $u_{|E^-(u)} = -id_{E^-(u)}$

Si $\dim(E^-(u)) = 1$, u est une réflexion.

Si $\dim(E^-(u)) = 2$, u est un renversement.

__Théorème :__ Le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément si $u \in O(q)$, u est produit d'au plus n réflexions.

__Démo :__ Soit $u \in O(q)$. On pose $F_u = \{x \in E,\ u(x) = x\}$ sev de E (ens des pts fixes de u). On définit $p_u := n - \dim F_u$ $= \dim(\ker u - id)$? (Thm du rg). Nous allons montrer que u est produit d'au plus p_u réflexions.

On raisonne par récurrence sur p_u.

- Si $p_u = 0$ alors $F_u = E$ donc $u = id_E$ (que des pts fixes). Par convention, id_E est produit de zéro réflexion.
- Soit $p_u \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$ et soit $y = u(x)$. Alors $u(x) \neq x$ car $x \notin F_u$ ie $y \neq x$. Or comme F_u stable par u et u isométrie on a $F_u^\perp$ stable par u. (preuve Rom p707) __Preuve alternative :__

> Supposons que, pour tout $x \in F_u$, $u(x) \in F_u$.
> Mq pour tout $y \in F_u^\perp$, $u(y) \in F_u^\perp$ ie $\forall y \in F_u^\perp, \forall z \in F_u, f(u(y), z) = 0$
> Soit $y \in F_u^\perp$ et $z \in F_u$ $(u(z) = z)$:
> $$f(u(y), z) = f(u(y), u(z)) = f(y,z) = 0$$

Ainsi $y \in F_u^\perp$.

Scanné avec CamScanner

$f(x,y)=f(y,x)$ f sym

Montrons que $x-y \perp x+y$.

$$f(x-y,\ x+y) = f(x,x) + \overset{\perp\, \neq 0}{f(x,y)} - \overset{\perp\, \neq 0}{f(y,x)} - f(y,y)$$

$$= f(x,x) - f(u(x), u(x)) = f(x,x) - f(x,x) = 0$$

Comme $x-y \neq 0$ on peut écrire

$$E = \mathrm{vect}(x-y) \oplus \mathrm{vect}(x-y)^{\perp} = E^- \oplus E^+$$

On définit $\tau \in \mathcal{L}(E)$ par $\begin{cases} \tau_{|E^-} = -id_{E^-} \\ \tau_{|E^+} = id_{E^+} \end{cases}$

Alors $\tau^2 = id_E$ et $\dim(E^-) = 1$ donc τ est une réflexion (par déf ou c'est prop ?)

dernière égalité car c'est lin ? $\tau(x-y) = \tau(x) - \tau(y)$.

On a $\tau(x-y) = -id_{E^-} = -(x-y) = y-x = \tau(x) - \tau(y)$

et $\tau(x+y) = id_{E^+} = x+y = \tau(x) + \tau(y)$. (car $x-y \perp x+y$

donc $x+y \in (\mathrm{vect}(x-y))^{\perp}$)

On a donc en faisant la différence de ces deux inégalités que $\tau(y) = x$ ie

$\tau(u(x)) = \tau \circ u(x) = x$. Ainsi $x \in F_{\tau u}$.

ça peut juste s'écrire

→ On sait que $x, y \in F_u^{\perp}$ donc $x - y \in F_u^{\perp}$. Ainsi on a $F_u \subset (x-y)^{\perp} = E^+$

$x-y \in F_u^{\perp}$, $\mathrm{vect}(x-y) \subset F_u^{\perp}$ sev

et $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

donc $(F_u^{\perp})^{\perp} = F_u \subset (x-y)^{\perp}$

Par conséquent si $z \in F_u$, alors $\tau u(z) = \tau(z) = z$. On a donc mq $F_u \subset F_{\tau u}$.

Cette inclusion est stricte car $x \in F_{\tau u} \setminus F_u$

On a donc $p_{\tau u} < p_u$. Pour appliquer l'hypothèse de rec il reste à mq

τu est une isométrie. Or u est une isométrie, il suffit de mq τ en est une.

Soit $a, b \in E$. On écrit $a = a^+ + a^-$, $b = b^+ + b^-$ ($b^+, a^+ \in E^+$ et $b^-, a^- \in E^-$)

D'une part, $f(\tau(a), \tau(b)) = f(\tau(a^+) + \tau(a^-), \tau(b^+) + \tau(b^-))$

$$= f(a^+ - a^-, b^+ - b^-) = f(a^+, b^+) - \underbrace{f(a^-, b^+)}_{=0} - \underbrace{f(a^+, b^-)}_{=0} + f(a^-, b^-)$$

$$= f(a^+, b^+) + f(a^-, b^-)$$

D'autre part $f(a,b) = f(a^+ + a^-, b^+ + b^-) = f(a^+, b^+) + \overset{0}{f(a^+, b^-)} + \overset{0}{f(a^-, b^+)} + f(a^-, b^-)$

$$= f(a^+, b^+) + f(a^-, b^-)$$

Ainsi τ est une isométrie. On peut appliquer l'hypothèse de rec à

$p_{\tau u}$ et on obtient $\tau u = \tau_1 \cdots \tau_r$ avec τ_i réflexions et $r \leq p_{\tau u} \leq p_u - 1$

On obtient donc $u = \tau \tau_1 \cdots \tau_r$ avec $r + 1 \leq p_u \leq n$.

Scanné avec CamScanner

"on pourrait montrer que p_u est un choix optimal"

Bonne perche à lancer.

Montrons que p_u est minimal : Soit $u \in O(E)$ un produit de p réflexions : $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$ où s_i est la réflexion de E par rapport à l'hyperplan H_i. On a $H_1 \cap \cdots \cap H_p \overset{①}{\subset} \ker(u - id)$ et

preuve V.G Alg p 126 corollaire 1.

$n - p_u = \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \overset{②}{\geqslant} n - p$ d'où $n - p \leqslant n - p_u$ et $p_u \leqslant p$

① $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$, s_i réflexion par rapport à H_i donc $\begin{cases} s_i(x) = x & \text{si } x \in H_i \\ s_i(x) = -x & \text{si } x \in H_i^\perp \end{cases}$

Soit $x \in H_1 \cap \cdots \cap H_p$ alors $u(x) - x = s_1 \circ \cdots \circ s_p(x) - x = x - x = 0$

② Par récurrence sur p :

- Si $p = 1$, alors $\dim(H_1) = \dim(E) - 1$ par déf d'un hyperplan.
- On supp le résultat vrai jusqu'au rg p. Soient $H_1, \dots, H_{p+1}$ hp de E. On pose $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$. Par la formule de Grassmann : $\dim(F) + \dim(H_{p+1}) = \dim(F + H_{p+1}) + \dim(F \cap H_{p+1})$

Par Hyp de Rec et par déf d'un hp :

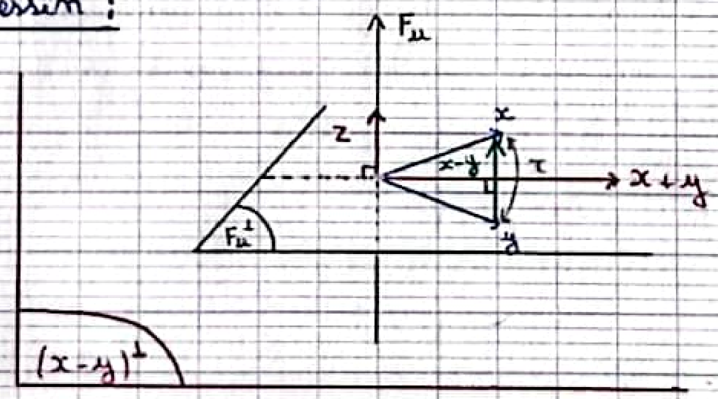
$\dim(E) - p + \dim(E) - 1 = \dim(F + H_{p+1}) + \dim(F \cap H_{p+1})$

et comme $F + H_{p+1} \subset E$, $\dim(F + H_{p+1}) \leqslant \dim(E)$

donc $\dim(E) - (p+1) \leqslant \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p+1} H_i\right)$

Demander de l'aide pour comprendre comment faire le dessin

Dessin :



$x - y \in F_u^\perp$

$F_u \subset (x-y)^\perp$

Théorème : Pour $n \geqslant 3$, $O^+(q)$ est engendré par les renversements. Plus précisément, tout élément $u \in O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Démonstration :

⚠ à ne pas oublier

- Si $u = id_E$ alors par convention u est produit de 0 renversement.
- Si $n = 3$. Soit $u \in O^+(q)$. Alors $u = \tau_1 \ldots \tau_r$ avec $r \leqslant 3$ et τ_i sont des réflexions. Or le déterminant d'une réflexion est -1 (s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ dans une bonne base) Ainsi on a nécessairement $u = \tau_1 \tau_2$.

$\dim E^- = 1$.

On rem que pour $n = 3$, si τ est une réflexion, $-\tau$ est un renversement

($\exists B_i$ une bon de E tq τ_i de matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ et $Mat_{B_i}(-\tau_i) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ donc $-\tau_i$ renversement)

Ainsi en prenant $u = (-\tau_1)(-\tau_2)$ on a que u est produit de deux renversements.

- Si $n \geq 4$. Soit $u \in O^+(q)$ alors $u = \tau_1 \cdots \tau_{2p}$ avec $2p \leq n$ (on nb pair pour avoir un déterminant égal à 1).

Il suffit de montrer le lemme suivant et on aura le résultat.

<u>Lemme</u> : Soit $n > 3$ et soit τ_1, τ_2 des réflexions. Alors il existe des renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2$

<u>Démo</u> : Soient H_1 et H_2 les hyperplans de τ_1 et τ_2. On a nécessairement $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2 \geq n-3$. Ainsi $H_1 \cap H_2$ va contenir un sous espace V de dimension $n-3$.

Ainsi $(\tau_1\tau_2)_{|V} = id_V$ (car $V \subset H_1 \cap H_2$). On a que $\tau_1\tau_2$ stabilise V et est une isométrie (car τ_1 et τ_2 sont des isométries). On a donc $\tau_1\tau_2(V^\perp) \subset V^\perp$ (cf encadré rouge). Or $\dim(V^\perp) = n - \dim V = 3$.

D'après le cas $n = 3$ il existe $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ des renversements tels que $(\tau_1\tau_2)_{|V^\perp} = (\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)_{|V^\perp}$

On prolonge maintenant $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ par l'identité sur E et on obtient le résultat.

2

Scanné avec CamScanner